فصل ۱ - ماتریس ها (جبر خطی) و دستگاه معادلات خطی

ماتریس

A سطر × ستون

D ماتریس قطری آنگاه می‌شود D^n ← عناصر قطر اصلی آن را به توان n برسانیم

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که همه درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر باشند

ضرب ماتریس‌ها:

$A_{m\times p} B_{p\times n} = C_{m\times n}$

$AB \neq BA$ عدم جابه‌جایی $\quad AB = AC \not\Rightarrow B = C$ عدم قانون حذف

حالتی که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد: ۱- دو ماتریس هم درجه و قطری ۲- یکی از ماتریس‌ها اسکالر ۳- یکی از ماتریس‌ها قرینه ماتریس دیگری باشد ۴- هر دو ماتریس وضعیتی مانند $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ داشته باشند

* اگر A, B تعویض‌پذیر آنگاه اتحادهای جبری در مورد دو ماتریس برقرارند $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

* حاصلضرب دو ماتریس بالا (پایین) مثلثی یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی است که درایه‌های قطر اصلی آن از ضرب درایه‌های متناظر روی قطر اصلی هر دو ماتریس اولیه است

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی اگر A مربعی $A^n = \underbrace{A.A.A\dots A}_{n \text{ بار}}$

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ $\quad n = 2k+1 \longrightarrow A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ $\quad n = 2k \rightarrow A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$

در $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} \leftarrow A^n = 0$

ماتریس A متناوب با دوره تناوب n اگر $A^{n+1} = A$

ماتریس متناوب با دوره تناوب ۱ را ماتریس هم‌قوه گوییم

ماتریس مربعی A را بی‌اثر از مرتبه n اگر $A^n = 0$

ماتریس بی‌اثر از مرتبه ۲ را ماتریس پوچ گوییم

ترانهاده یا ترانسپوز یک ماتریس های سطر و ستون را عوض کرده $A' = A^T \qquad (AB)' = B'A'$

- ماتریس مربعی A را متقارن گوییم اگر $A' = A$

- ماتریس مربعی A را ضد متقارن گوییم اگر $A' = -A$

- در هر ماتریس ضد متقارن عناصر روی قطر اصلی صفرند

اگر A ماتریس مربعی $A + A'$ ماتریس متقارن و $A - A'$ ماتریس ضد متقارن است $A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$

دترمینان هر ماتریس ضد متقارن از درجه فرد برابر صفر و از درجه زوج عددی به فرم مربع کامل است

- اگر A و B دو ماتریس متقارن هم درجه آنگاه $A \pm B$ ، λA ، A^n ، $AB + BA$ متقارن و $AB - BA$ ضد متقارن

اگر A و B دو ماتریس ضد متقارن هم درجه $A \pm B$ و λA ضد متقارن و A^n اگر n زوج آنگاه متقارن و اگر n فرد آنگاه ضد متقارن

هر ماتریس A ← ماتریس AA' و $A'A$ مربعی متقارن اند

$Tr\,A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ ترس یا رد یک ماتریس مربعی مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی

دترمینان یک ماتریس مربعی $|A|$ یا $\det A$

$A = [a] \to |A| = a$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to |A| = ad - bc$ $\quad A_{33} = (a_{11})^{i+j}\, a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \dots$

دترمینان کهاد هر عنصر کافی است سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را حذف کرده و دترمینان حاصل را گرفته ضرب کنیم

علامت جایگاه هر عنصر $(-1)^{i+j}$

$N_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ همسازه هر عنصر ضرب دترمینان کهاد آن عنصر در جایگاه آن عنصر

* اگر تمام درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس را k برابر کنیم دترمینان حاصل k برابر دترمینان اولیه است $|kA| = k^n |A|$
* اگر جای دو سطر متوالی و یا دو ستون متوالی را عوض کنیم دترمینان حاصل قرینه می‌شود
* اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس دقیقاً یکسان یا مضربی از هم باشند حاصل دترمینان صفر است
* اگر ترکیب خطی دو سطر یا ستون دقیقاً در سطر یا ستون دیگری نوشته شده باشد حاصل دترمینان صفر است
* اگر k برابر سطر یا ستون را به سطر یا ستون دلخواه دیگری اضافه کنیم دترمینان تغییری نخواهد کرد
* اگر مجموع چند سطر یا ستون دلخواه به سطر یا ستون دلخواه دیگری جمع کنیم دترمینان تغییری نخواهد کرد
* در ماتریس مثلثی حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی ماتریس، دترمینان ماتریس را نشان می‌دهد
* اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ با فرض $m>n$ دترمینان ماتریس AB صفر است ولی BA باید محاسبه شود

دترمینان وندرموند $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

معادله خطی که از دو نقطه $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ می‌گذرد از بسط دترمینان روبرو قابل محاسبه است $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

مساحت مثلثی رأس‌هایش $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ برابر $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

ماتریس منفرد (تکین) ماتریس مربعی A که دترمینان آن صفر باشد

ماتریس همسازه یا الحاقی اگر به جای هر عنصر ماتریس مربعی A همسازه آن عنصر را قرار دهیم $N = \operatorname{cof} A \quad A^* = N'$

معکوس ماتریس مربعی $A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \quad A^{-1}_{ij} = \frac{N'_{ij}}{|A|} = \frac{N_{ji}}{|A|}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB \quad (AB)^* = B^*A^* \quad (A')^* = (A^*)'$

$AA^* = I_{n\times n} \times |A| \quad (A^p)^* = (A^*)^p \quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad (AB)^{-1} = (A^{-1})^p \quad (A')^{-1} = (A^{-1})' \quad (A)^{**} = |A|^{n-2} A$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|} \quad |A^*| = |A|^{n-1} \quad (\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc} \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ماتریس برگردان: معکوس ماتریس برابر خود ماتریس باشد اگر و تنها اگر $A^2 = I$ یا $(A-I_n)(A+I_n)=0$

ماتریس متعامد: اگر معکوس یک ماتریس برابر ترانهاده آن ماتریس شود $A^{-1} = A'$ یا $A.A' = A'A = I$

دترمینان ماتریس متعامد برابر ۱+ یا ۱- است

یک ماتریس ترتیبی متعامد است اگر و تنها اگر حاصل ضرب درونی سطرهای ماتریس صفر باشند

ماتریس 2×2 در دو حالت متعامدند $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ یا $R_\beta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ که ماتریس متقارن نسبت به خط $y = x\tan\theta$

هر ماتریس که ماتریس نظیر آن متعامد باشد طول را ثابت نگه می‌دارد و زوایای بین بردارهای تبدیل یافته را بفرجامی دهد

$R_\alpha . R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ $\quad (R_\alpha)^n = R_{n\alpha}$ $\quad (R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$

معادله مشخصه، مقدار ویژه و بردار ویژه: اگر $AX = \lambda X$ آن گاه λ یک مقدار ویژه ماتریس A و X بردار ویژه نظیر آن است

$|A - \lambda I| = 0$ معادله مشخصه ماتریس A

* اگر $A_{2\times 2}$ و مقدار ویژه λ_1, λ_2 را داشته باشد ← $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr\,A$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A$

* اگر $A_{3\times 3}$ و مقادیر ویژه آن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr\,A$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A$

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{2}\left((Tr\,A)^2 - (Tr\,A^2)\right)$

اگر $A_{n\times n}$ و مقادیر ویژه آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = Tr\,A$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A$

هرگاه یا چند تا از مقادیر ویژه یک ماتریس برابر صفر باشد آن گاه دترمینان آن ماتریس صفر است

برای بدست آوردن معادله مشخصه ماتریس A^{-1} کافی است در معادله مشخصه ماتریس A همه λ ها را به $\frac{1}{\lambda}$ تبدیل کرد

اگر مقادیر ویژه ماتریس A را $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد

$A^{-1} \to \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \dots$ $\quad KA \to k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n$ $\quad A^p \to \lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$

$A + KI \to \lambda_1 + k, \lambda_2 + k, \dots, \lambda_n + k$ $\quad A' \to \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$

- مقادیر ویژه یک ماتریس مثلثی همان عناصر روی قطر اصلی ماتریس
- برای ماتریس ضد متقارن تمام مقادیر ویژه صفر یا اعداد موهومی محض است
- بردار ویژه ماتریس متقارن دو به دو بر هم عمودند
- دو ماتریس A و B مشابه اند اگر ماتریس معکوس پذیری مانند R وجود داشته باشد که $B = R^{-1}AR$

ماتریس مثبت و منفی

A مثبت معین اگر تمام مقادیر ویژه آن مثبت و A را معین منفی گوییم اگر تمام مقادیر ویژه آن منفی باشد

A شبه مثبت اگر تمام مقادیر ویژه آن مثبت یا صفر باشد و A را شبه منفی گوییم اگر تمام مقادیر ویژه آن منفی یا صفر باشد

A نامعین است اگر برخی از مقادیر ویژه مثبت و برخی از مقادیر ویژه منفی باشد

$X^TAX > 0 \to$ معین مثبت A $\quad X^TAX < 0 \to$ معین منفی A $\quad X^TAX$ تغیر علامت $\to$ نامعین A $\quad 0 \neq X$

اگر هیچ یک از مقادیر ویژه های یک ماتریس صفر نشوند آن گاه A معکوس پذیر است

رتبه یا رنک یک ماتریس

۱) درجه بزرگترین دترمینان مخالف صفر قابل استخراج از ماتریس A

۲) سیستم «تعداد سطرهای مستقل خطی» = «تعداد ستون های مستقل خطی»

در ماتریس قطری، رتبه برابر تعداد عناصر غیر صفر روی قطر اصلی

قانون حذف اگر A, B, C ماتریس های $n \times n$ آن گاه

اگر $rank A = n$ ، $AB = AC \Rightarrow B = C$

اگر $rank A = n$ ، $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

اگر $AB = 0$ ولی A, B تکین صفر $\Rightarrow$ $rank A < n$ ، $rank B < n$

دستگاه معادله خطی $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ماتریس ستون طرف ثانی $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب

دستور کرامر

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$

Δ دترمینان ضرایب دستگاه و Δx_1 ← در Δ ستون اول را حذف به جای آن ستون طرف ثانی دستگاه قرار داده

$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2 = (|A|\times|B|)^2$

فصل ۲ - بردارها و معادلات صفحه و خط در فضا

جمع و تفریق دو بردار

$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$ $\quad |\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$

$R_x = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta \qquad R_y = F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta$

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta}{F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta} \qquad R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\beta-\alpha)$

نیمساز داخلی $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر $\vec{N} = \frac{\vec{A}}{|A|} + \frac{\vec{B}}{|B|}$

زوایای یک بردار با محورها و بردار یکه یک بردار بردار $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ با محورهای x و y و z زوایای α و β و γ دارد

$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{A}|}$

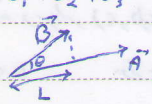
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \vec{A} = |\vec{A}|(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})$

ضرب داخلی یا عددی دو بردار

$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ زاویه بین دو بردار θ

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

تصویر بردار B بر A $\qquad \lambda_{\vec{A}}$ (بردار یکه در جهت $\vec{A}$) $\qquad L = |\vec{B}|\cos\theta| = |\vec{B}\cdot\lambda_{\vec{A}}|$

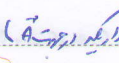


نامساوی کوشی - شوارتز $\qquad |\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$ $\qquad$ نامساوی مثلث $\qquad |\vec{A}+\vec{B}| \leq |\vec{A}|+|\vec{B}|$

$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2 \qquad |\vec{A}+\vec{B}|^2 - |\vec{A}-\vec{B}|^2 = 4\vec{A}\cdot\vec{B} \qquad |\vec{A}+\vec{B}|^2 + |\vec{A}-\vec{B}|^2 = 2(|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2)$

ضرب خارجی یا برداری دو بردار

$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad S = \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ $\qquad$ مساحت متوازی‌الاضلاع



$\vec{A}\times\vec{A} = 0$ و $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ ← شرط توازی دو بردار، صفر شدن ضرب خارجی

$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 \qquad \tan\theta = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{\vec{A}\cdot\vec{B}} \qquad |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\times|\vec{B}|\sin\theta$

ضرب مخلوط سه بردار

$A\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}] \qquad \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ حجم متوازی‌السطوح

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ بردار $\qquad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$ اتحاد ژاکوبی

$\vec{A}\times\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$ اتحاد لاگرانژ

$[\vec{A}\times\vec{B}\quad \vec{B}\times\vec{C}\quad \vec{C}\times\vec{A}] = [\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]^2$

$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = [\vec{A}\ \vec{C}\ \vec{D}]\vec{B} - [\vec{B}\ \vec{C}\ \vec{D}]\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{C} \\ \vec{A}\cdot\vec{D} & \vec{B}\cdot\vec{D} \end{vmatrix}$

ضرب سه‌گانه سه بردار: بردار صفحه $\vec{B}$ و $\vec{C}$ و عمود بر A ← بردار ←

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ عدم خاصیت ترکیب‌پذیری

بردارهای (خاصیت)

بردارهای $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots$ وابستگی خطی دارند هرگاه $l_1, l_2, \dots$ پیدا شود که $l_1\vec{V}_1 + l_2\vec{V}_2 + \dots + l_n\vec{V}_n = \vec{0}$

در غیر این صورت بردارها مستقل خطی اند

- شرط لازم و کافی برای وابستگی خطی ← بردارها در یک صفحه باشند (ضرب مختلطشان صفر باشد)
- هر چهار بردار دلخواه در فضا وابستگی خطی دارند
- اگر بردار $\vec{a}$ در مجموعه‌ای از بردارها باشد آن مجموعه وابستگی خطی دارد
- شرط استقلال: بردار صفر ← نمی‌تواند ترکیب خطی از بقیه بردارها نیست
- اگر تعداد بردارها با بعد فضا برابر باشد بردارها دارای استقلال خطی اند اگر دترمینان سطری ماتریس (بردارها) صفر نباشد

معادله صفحه در فضا

صفحه‌ای که از نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ نرمال آن باشد: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$by+cz+d=0$ موازی محور x — $ax+cz+d=0$ موازی محور y — $ax+by+d=0$ موازی محور z

$ax+d=0$ موازی صفحه yoz — $by+d=0$ موازی صفحه xoz — $cz+d=0$ موازی صفحه xoy

$ax+by+cz=0$ گذرنده از مبدأ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ معادله صفحه گذرنده از ۳ نقطه

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$ مساحت مثلثی که از ۳ نقطه می‌گذرد

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a,0,0)$ و $(0,b,c)$ $(0,0,c)$ $(0,b,0)$ صفحه گذرنده از ۳ نقطه

$\frac{|abc|}{6}$ حجم هرم محدود به صفحه و مختصات

- برای یافتن راستای تصویر خط Δ بر صفحه P کافی است ابتدا بردارهای خط را در بردار نرمال صفحه ضرب خارجی کرده و سپس بردار حاصل را در بردار نرمال صفحه ضرب خارجی نماییم

معادله یک دسته صفحه خط Δ فصل مشترک صفحات 1 و 2 است: معادله کلیه صفحاتی که از Δ می‌گذرند برابر

$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

شرایط دو صفحه نسبت به هم

متوازی اند اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ و اگر $\frac{d_1}{d_2}$ نیز برابر باشد منطبق اند

شرط متعامد بودن دو صفحه $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

زاویه بین دو صفحه

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از دو صفحه

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فاصله نقطه P از صفحه‌ای با بردار $\vec{N}$ و نقطه P_0

$$\frac{|\vec{PP_0}\cdot\vec{N}|}{|N|}$$

فاصله دو صفحه موازی

$$\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

وضعیت سه صفحه نسبت به همدیگر

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\\ a''x+b''y+c''z+d''=0\end{cases}$$

اگر $\Delta\neq0$ ← سه صفحه متقاطعند

اگر $\Delta=0$ و $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ مخالف صفر باشد ← سه صفحه تقاطع مشترک ندارند

اگر $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ← سه صفحه در یک خط مشترک اند

معادله خط در فضا

معادله خطی که از (x_0,y_0,z_0) گذشته و بردار (p,q,r) با آن موازی است.

$$\begin{cases}x=pt+x_0\\ y=qt+y_0\\ z=rt+z_0\end{cases}$$

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر حذف و صورت مساوی صفر قرار می‌دهیم

موازی محور z: $x=x_0,\ y=y_0$

موازی محور y: $x=x_0,\ z=z_0$

موازی محور x: $y=y_0,\ z=z_0$

موازی صفحه xoy: $\begin{cases}z=z_0\\ \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}\end{cases}$

موازی صفحه xoz: $\begin{cases}y=y_0\\ \frac{x-x_0}{p}=\frac{z-z_0}{r}\end{cases}$

موازی صفحه yoz: $\begin{cases}x=0\\ \frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{r}\end{cases}$

معادله خطی که از دو نقطه می‌گذرد

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

وضعیت یک خط و یک صفحه خط $\Delta: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ و صفحه $P: ax+by+cz+d=0$

۱- $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$ ، خط Δ بر صفحه P عمود است

۲- $ap+bq+cr=0$ خط Δ با صفحه P موازی است

۳- اگر Δ و P موازی نباشند متقاطع اند که اگر θ زاویه بردار هادی خط و نرمال صفحه $\theta-\frac{\pi}{2}$ زاویه بین خط و صفحه

برای یافتن محل تقاطع معادله پارامتری خط را در صفحه قرار داده و t مربوطه را پیدا کرده

اگر t وجود نداشته باشد خط و صفحه موازی اند اگر به ازای هر t ارضا شود خط در صفحه است

وضعیت دو خط در فضا متقاطع موازی متنافر

خطوط Δ_1 و Δ_2 با بردارهای هادی $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$

موازی اند $\vec{u}_1\times\vec{u}_2=0$ متقاطع اند $AB\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)=0$ متنافر $\vec{AB}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\neq 0$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}\neq 0$$ متنافر

خط فصل مشترک دو صفحه

خط $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ یکی از بینهایت جفت صفحه که فصل مشترک آنند

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}\\ \frac{x-x_0}{p}=\frac{z-z_0}{r}\end{cases}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله نقطه P از خط Δ که P_0 نقطه دلخواهی از خط

$$\frac{|\vec{PP_0}\times\vec{U}|}{|\vec{U}|}$$

عمود مشترک دو خط متنافر

A و B نقاطی از خطوط Δ' و Δ (برحسب پارامترهای t' و t) باید شروط را ارضا کنند $AB\perp\Delta'$ $AB\perp\Delta$

فصل ۳ توابع دو متغیره و بحث های اولیه و مربوط به آن

دامنه تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ مجموعه ای از تمام زوج مرتب (x,y)

منحنی تراز تابع $z=f(x,y)$ دسته منحنی ای با معادله $f(x,y)=c$ هستند که تابع z در آن $z=c$ مقدار ثابت است

پیوستگی تابع $f(x,y)$ در یک نقطه تعریف شده باشد و حد در آن نقطه موجود باشد حد تابع و مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد

اگر الف) روی خط $x=x_0$ ، y را به y_0 میل دهیم ب) روی خط $y=y_0$ ، x را به x_0 میل دهیم و جواب آن دو متفاوت باشد ← عدم وجود حد

نباید حاصل حد به شیب خطوطی که به آن نقطه میل می کند وابسته باشد

* اگر $(x,y)\to(0,0)$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسید باید از تغییر متغیر $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ استفاده کرد $r\to 0$ و θ نباید وابسته باشد اگر به ازای θ های جواب مبهم شد حاصل باید برسی شود

مشتقات جزئی (نسبی) در توابع دو متغیره: z'_x یا z_x یا $\frac{\partial z}{\partial x}$ (با فرض ثابت بودن y از x مشتق بگیریم)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

در صورتی که مشتقات نسبی / جزئی مرتبه اول $f(x,y)$ در یک نقطه موجود و پیوسته باشد تابع در آن نقطه مشتق پذیر است و تابع قطعاً در آن نقطه پیوسته است

تابع در صورتی مشتق پذیر است که

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

توابعی وجود دارند که اگرچه مشتقات جزئی در نقطه ای موجودند اما تابع اصلاً پیوسته نیست

$$z_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

مشتقات جزئی $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ را می توان به عنوان شیب های خطوط مماس در نقطه (a,b,c) بر منحنی های C_1 و C_2 که به ترتیب تقاطع S با صفحات $y=b$ و $x=a$ هستند

* اگر در نقطه (a,b) باشیم و در جهت Δ حرکت کنیم چنانچه منحنی ای تراز در حال فشرده شدن باشد علامت $\frac{\partial^2 f}{\partial\Delta^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial\Delta}$ یکسان و چنانچه منحنی ای تراز در حال باز شدن باشد علامت $\frac{\partial^2 f}{\partial\Delta^2}$ و علامت $\frac{\partial f}{\partial\Delta}$ غیر یکسان اند

قضیه مشتق های آمیخته: هرگاه f و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم آن پیوسته باشند آنگاه $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ (وقتی مشتقات مرتبه دوم f پیوسته باشند f از کلاس C^2 است)

قاعده مشتق گیری ضمنی تابع ضمنی $f(x,y,z)=0$ را داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z} \quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_x} \quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{F'_z}{F'_x} \quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y} \quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{F'_z}{F'_y}$$

- دیفرانسیل کامل توابع دو متغیره برای تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ دیفرانسیل مرتبه اول z $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

دیفرانسیل مرتبه دوم z $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=(dx\ dy)\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}$

دیفرانسیل مرتبه n ام z $d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$

- دیفرانسیل کامل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ دیفرانسیل کامل است اگر $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ یا $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

- تابع $z=f(x,y)$ اگر x و y بی‌نهایت کوچک دلخواه Δx و Δy داشته باشد کل تغییرات z به این صورت است $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

- شرط لازم و کافی برای اینکه عبارت $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ کامل باشد

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ دیفرانسیل کامل مرتبه دوم است اگر

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(dy)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(dz)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}dydz$$

$$=(dx\ dy\ dz)\begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz}\\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz}\\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}$$

- در عبارت $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ اگر $dy=y-b$ و $dx=x-a$ برای $z=f(x,y)$ و بر پایه f_x و f_y معادله صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ $z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$

قاعده مشتق گیری زنجیره‌ای

اگر $w=f(x,y,z)$ و $x=x(t)$ و $y=y(t)$ و $z=z(t)$

$$\frac{dw}{dt}=w'_t=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

اگر $z=f(u,v,w)$ بوده $w(x,y)$ و $v(x,y)$ و $u(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

ژاکوبین و مشتق گیری به صورت ضمنی اگر u و v توابعی از متغیرهای مستقل x و y

$$\begin{cases} f(x,y,u,v)=0\\ g(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

که در آن $\frac{\partial(f,g)}{\partial(\alpha,\beta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\alpha} & \frac{\partial f}{\partial\beta}\\ \frac{\partial g}{\partial\alpha} & \frac{\partial g}{\partial\beta}\end{vmatrix}$ ژاکوبین (f,g) نسبت به (α,β) گوییم

اگر متغیرهای $y_1 \dots y_n$ برحسب $x_1 \dots x_n$ و متغیرهای $x_1 \dots x_n$ برحسب $y_1 \dots y_n$ قابل بیان باشد

$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}=\frac{1}{\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}}$$

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = (-1)^n \frac{\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}}{\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}}$$

در دستگاه $\begin{cases} 0 = F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \\ \vdots \\ F_n = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 0 \end{cases}$

توابع همگن تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ را تابع همگن از درجه α می‌گویند

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^\alpha . f(x,y,z) \quad \text{یا} \quad x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha . w$$

قضیه اویلر هرگاه $F(u)=g(x,y,z)$ تابعی همگن از درجه α اگر $w=F(u)$ و $u=u(x,y,z)$ همگن از درجه α باشد

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha\frac{F(u)}{F'(u)}$$

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha u f'(u)$$

$z=f(x,y)$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha . z$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)z$$

اگر $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه α

$$f_x(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{\alpha-1} f_x(x,y)$$

$$f_y(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{\alpha-1} f_y(x,y)$$

اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای ماکزیمم مطلق است اگر $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ دارای مینیمم مطلق است اگر $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ دارای ماکزیمم نسبی است اگر یک همسایگی داشته باشد که $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) < 0$ دارای مینیمم نسبی است اگر یک همسایگی داشته باشد که $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) > 0$

نقطه بحرانی اگر مشتقات نسبی مرتبه اول تابع $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ در آن نقطه توأماً صفر یا بی‌نهایت شوند

نقطه زینی آن دسته از نقاط بحرانی را که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی‌شوند

- اگر تابع در همسایگی نقطه معین دارای اکسترمم نسبی باشد، مشتقات نسبی مرتبه اول f در نقطه موجود باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

قضیه تابع در نقطه (x_0,y_0) نقطه بحرانی است و $f_{xx}(x_0,y_0)=A$ ، $f_{xy}(x_0,y_0)=B$ ، $f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$\Delta = B^2 - AC$

اگر $\Delta<0$ و $A<0$ تابع دارای ماکزیمم نسبی و اگر $\Delta<0$ ، $A>0$ تابع f در نقطه دارای مینیمم نسبی اگر $\Delta>0$ در نقطه زینی قرار دارد

اگر $\Delta=0$ پوشش ناکارآمد است

- دترمینان هسین تابع $-\Delta = H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

* تابع $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ که $\Delta = B^2-AC$ اگر $\Delta<0$ ، $A>0$ نقطه مینیمم نسبی و اگر $\Delta<0$ ، $A<0$ نقطه ماکزیمم نسبی است و اگر $\Delta>0$ نقطه زینی است

روش دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $z=f(x,y)$ در $P(x_0,y_0)$ مجموعه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم اگر $d^2z|_p<0$ دارای ماکزیمم نسبی و اگر $d^2z|_p>0$ دارای مینیمم نسبی و اگر $d^2z|_p$ دارای علامت مشخصی نباشد دارای نقطه زینی و اگر $d^2z|_p=0$ روش ناکارآمد

تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ چنانچه مشتقات جزئی مرتبه اول صفر باشد $H=\begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix}$ اگر H در آن نقطه منفی و یعنی تابع دارای ماکزیمم نسبی است و اگر H در آن نقطه مثبت و یعنی تابع دارای مینیمم نسبی و اگر H نا یعنی تابع دارای نقطه زینی است

اکسترمم مشروط

اکسترمم $z=f(x,y)$ با شرط $g(x,y)=0$ تابع لاگرانژ آن $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ (ضریب لاگرانژ) و از حل دستگاه لاگرانژ نقاط بحرانی بدست می آید $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 & \frac{\partial L}{\partial y}=0 & g(x,y)=0 \end{cases}$ ← دستگاه

* اگر در نقطه بحرانی P حاصل $\vec{\nabla} g$ مخالف صفر باشد و $\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g=0$ باید از $H=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} \rightarrow H>0$ تابع دارای ماکزیمم اگر $H<0$ تابع دارای مینیمم و اگر $H=0$ روش ناکارآمد است

اکسترمم در یک ناحیه

نقاط بحرانی تابع را پیدا کرده و مقادیر تابع را تنها در نقاط بحرانی داخل ناحیه محاسبه کرده و بر روی منحنی های مرزی ناحیه مقادیر اکسترمم تابع f را محاسبه کرده

برازش خط مستقیم در مفهوم حداقل مربعات

$$\begin{cases} \sum y_i = mA + B\sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum x_i y_i = A\sum x_i + B\sum x_i^2 \end{cases}$$

معادله خط $y=A+Bx$ تعداد نقاط m

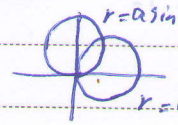
خط از مرکز سطح گذرد و آن نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ است می گذرد

دستگاه مختصات قطبی

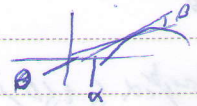
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

برای هر k این نقاط یک $(r,\theta)=(r,\theta+2k\pi)=(-r,\theta+(2k+1)\pi)=((-1)^k r,\theta+k\pi)$

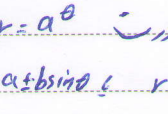
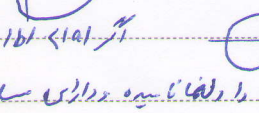
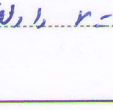
* یافتن نقاط تلاقی دو نمودار قطبی $r=f(\theta)$, $r=g(\theta)$ معادله $f(\theta)=g(\theta)$ را حل کرده و اگر $r=0$ باید به ازای هر θ مبدأ مختصات بررسی گردد



- فاصله دو نقطه $P_1(r_1,\theta_1)$ و $P_2(r_2,\theta_2)$ که در مختصات قطبی بیان شده $|P_1P_2|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$
- معادله $r=\frac{a}{1\pm e\cos\theta}$ برای $e>1$ هذلولی و برای $e<1$ بیضی و برای $e=1$ سهمی (افقی)
- معادله $r=\frac{a}{1\pm e\sin\theta}$ نمایش یک مخروط قائم با e مانند ↑
- رسم نمودار $r=f(\theta,\theta_0)$ ابتدا نمودار $r=f(\theta)$ را رسم کرده و حول مبدأ به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم
- خط $\theta=\theta_0$ محور تقارن نمودار $r=f(\theta)$ اگر $f(2\theta_0-\theta)=f(\theta)$
- اگر بر منحنی $r=f(\theta)$ در نقطه‌ای مانند A خطی مماس رسم کنیم زاویه خط با جهت مثبت محور قطبی α و زاویه خط مماس و شعاع حامل نقطه A را β می‌گیرد $\alpha=\theta+\beta$



$\tan\alpha=\frac{r+r'\tan\theta}{-r\tan\theta+r'}$ $\tan\beta=\frac{r}{r'}$ $r'=\frac{dr}{d\theta}$

- اگر دو منحنی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ در نقطه θ_0 متقاطع باشند زاویه حاده بین آن β آن‌گاه $\beta=|\psi_1-\psi_2|$ که ψ_1 و ψ_2 زاویه‌های شعاع حامل و خط مماس در θ_0 برای نمودار f و g هستند $\tan\beta=\frac{\tan\psi_1-\tan\psi_2}{1+\tan\psi_1\tan\psi_2}$
- در منحنی قطبی $r=f(\theta)$ داریم $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}$ اگر فقط $\frac{dy}{d\theta}=0$ خم دارای مماس و اگر فقط $\frac{dx}{d\theta}=0$ خم دارای مماس عمودی و از حل $r=0$ مشروط بر آنکه $\frac{dy}{d\theta}\neq 0$ خطوط مماس در قطب به دست می‌آید
- برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی $r=f(\theta)$ کافی است $\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ به یافتن θ های می‌پردازیم $\frac{dx}{d\theta}$ یا $\frac{dy}{d\theta}$ صفر یا تعریف نشده است
- زوایای خطوط مماس بر منحنی قطبی $r=f(\theta)$ کافی است $r=f(\theta)=0$ را حل کنیم
- سطح محصور به منحنی $r=f(\theta)$ و شعاع θ_1 و θ_2 برابر $S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}f^2(\theta)\,d\theta$
- برای منحنی $r=f(\theta)$ در فاصله $\alpha\le\theta\le\beta$ داریم طول منحنی $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ و سطح دوران منحنی حول محور x $2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ و حول محور y $2\pi\int_\alpha^\beta r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$
- انحنای منحنی در هر نقطه θ از رابطه $K(\theta)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ بدست می‌آید
- معادله دایره در دستگاه قطبی به مرکز (L,α) و شعاع a $r^2=a^2-L^2+2rL\cos(\theta-\alpha)$
- معادله دایره‌ای به مرکز قطب و شعاع R_0 برابر $r=R_0$
- معادله دایره‌ای به شعاع a که از قطب گذشته و مرکز آن روی $\theta=\alpha$ است $r=2a\cos(\theta-\alpha)$
- معادلات به صورت $r=a^\theta$ $r=bq_a^\theta$ $r=\theta$ به شکل یک مارپیچ است 
- معادله $r=a+b\cos\theta$ یا $r=a+b\sin\theta$ حلزونی  اگر $|b|>|a|$ حلزونی یک پیچ خورده
- اگر $|b|=|a|$ حلزونی دلبنا  اگر $|b|<|a|$ حلزونی له شده
- منحنی $r=a(1+\cos\theta)$ یا $r=a(1+\sin\theta)$ را دل‌نما نامیده و دارای مساحت $\frac{3}{2}\pi a^2$ و محیط $8a$

$r=a\sin n\theta$ و $r=a\cos n\theta$ گلبرگ است اگر n فرد ← گلبرگ n پره اگر n زوج ← گلبرگ $2n$ پره

$r\cos 3\theta$

n بزرگتر دنبال کشیده تر

$r=a\sqrt{\sin n\theta}$ و $r=a\sqrt{\cos n\theta}$ دنبالی ∞ را

مارپیچ $r^2=a^2\cos n\theta$ و $r^2=a^2\sin n\theta$ دنبال است از n فرد $2n$ گلبرگ اگر n زوج ← n برگ

چرخزاد (سیکلوئید) $\begin{cases} x=r(\theta-\sin\theta) \\ y=r(1-\cos\theta) \end{cases}$ مسیر نقطه r از دایره

چرخزاد $\begin{cases} x=r\theta-d\sin\theta \\ y=r-d\cos\theta \end{cases}$ مسیر نقطه d از دایره

اگر $\alpha\le t\le\beta$ قطعه منحنی با محور x ها $\int_\alpha^\beta |y|x'dt$ و سطح منحنی با محور y ها از $\int_\alpha^\beta |x|y'dt$ است

طول منحنی $\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt$ مساحت حاصل از دوران حول محور x ها $2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2+y'^2}dt$ و حول y ها برابر $2\pi\int_\alpha^\beta x\sqrt{x'^2+y'^2}$

انحنا در یک نقطه متناظر t

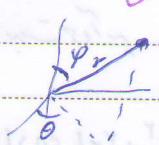
$$K(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} & r\ge 0 \\ \theta=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x} & 0\le\theta\le 2\pi \\ z=z & z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

دستگاه مختصات کروی (r,θ,φ)

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} & r\ge 0 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} & 0\le\theta\le 2\pi \\ \varphi=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$



اپراتور برداری نابلا و بحث های اولیه ـ فصل ۴

اپراتور برداری نابلا

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

گرادیان یک میدان اسکالر تابع $w = f(x, y, z)$

$$\text{grad}\, w = \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

بردار حاصل از گرادیان F در هر نقطه از دید مورد نظر در آن نقطه عمود است

$$\vec{\nabla} F\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

اگر معادله خط قائم را به صورت فصل مشترک دو صفحه $P=0$ و $Q=0$ بنویسیم $P + \alpha Q = 0$ رابطه معادله صفحات قائم را توصیف می کند

دیورژانس یک میدان برداری

$$\text{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$ اسکالر

$\text{div}\vec{F}|_P > 0$ ← خطوط میدان در حال واگرا $\text{div}\vec{F}|_P < 0$ ← خطوط میدان در حال همگرا $\text{div}\vec{F}|_P = 0$ خطوط میدان موازی اند

کرل یک میدان برداری

$$\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

شرط لازم و کافی $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ ← $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ (ϕ تابع پتانسیل میدان برداری غیرچرخشی $\vec{F}$)

تابع پتانسیل از حل دستگاه ← $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R$

کرل وضعیت چرخشی میدان را مشخص می کند یعنی $\text{curl}\vec{F}|_P \neq 0$ ← میدان آن در نقطه P چرخشی است

لاپلاسین یک میدان اسکالر

$$\text{div}(\text{grad}\, w) = \Delta w = \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

* میدان اسکالر w هارمونیک است هرگاه لاپلاسین آن صفر باشد

مشتق سوی (مشتق جهتی)

شدت تغییرات تابع w در جهت $\vec{u}$

$$\frac{dw}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} w \cdot \frac{u}{|\vec{u}|} = |\vec{\nabla} w| \cos\theta$$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ $\quad \vec{\nabla}\cdot(h\vec{A}) = (\vec{\nabla}h)\cdot\vec{A} + h(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ $\quad \vec{\nabla}\cdot(\nabla A) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \nabla^2 A$

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$ $\quad \vec{\nabla}\times(h\vec{A}) = (\vec{\nabla}h)\times\vec{A} + h(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ دیورژانس کرل هر میدان برداری صفر است $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}h) = \vec{0}$ کرل گرادیان هر میدان اسکالر برابر صفر است

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ $\quad \Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\Delta f$

$P\,dx + Q\,dy$ دیفرانسیل کامل است اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

فصل ۵ - توابع (میدان‌های) برداری

شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $\vec{F}(t)$ دارای جهت و طول ثابت باشد ← $\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=0$

و فقط دارای جهت ثابت باشد ← $\vec{F}(t)\times\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\vec{0}$ و فقط طول ثابت باشد ← $\vec{F}\cdot\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=0$

مشتق $\frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot\vec{G})=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{G}}{dt}+\frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{G}$ $\quad \frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{F}\times\frac{d\vec{G}}{dt}+\frac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G}$

طول منحنی

$$\left.\begin{aligned} ds&=|d\vec{R}|=|dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}\\ ds&=\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\cdot dt\right|=|R'(t)|\,dt=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt\end{aligned}\right\}\ L=\int_{t_1}^{t_2}ds$$

$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$ بردار یکانی مماس بر منحنی C $\quad N(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ بردار قائم یکانی اول $\quad \vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ بردار قائم یکانی دوم

صفحه بوسان (نرمال آن بردار قائم یکانی دوم $\vec{B}$)

صفحه قائم (نرمال آن بردار یکانی مماس $\vec{T}$)

صفحه اصلاحی (نرمال آن بردار یکانی اول $\vec{N}$)

$$B=\frac{\vec{V}\times\vec{a}}{|\vec{V}\times\vec{a}|}$$

انحنا

$R(t)$ منحنی $\rightarrow \vec{K}(t)=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$ انحنا $\quad R(t)=x(t)i+y(t)j$ منحنی $\rightarrow K(t)=\frac{|x'y''-y'x''|}{|x'^2+y'^2|^{3/2}}$

$y=f(x)$ منحنی $\rightarrow \vec{K}(t)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ انحنا $\quad f(\theta)$ منحنی $\rightarrow K(t)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$ انحنا

$R(t)=x\,i+y\,j+z\,k \rightarrow K=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|V|^3}$

دایره انحنا یا بوسان

دایره‌ای که بر منحنی C در نقطه P مماس است و انحنا منحنی C در نقطه P با انحنا دایره مذکور برابر و مرکز دایره مذکور در نقطه متعرض منحنی است

شعاع دایره بوسان $R=\frac{1}{K}$

مختصات مرکز دایره بوسان $\vec{C}(t_0)=\vec{R}(t_0)+R\,\vec{N}(t_0)\Big|_{t=t_0}$ ← بردار قائم یکانی اول

مرکز دایره $\quad x_c=\left\{x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right\}\Big|_{P_0} \quad y_c=\left\{y+\frac{1+y'^2}{y''}\right\}\Big|_{P_0}$

مؤلفه‌های مماس و قائم بردار شتاب

$\vec{a}(t)=a_T\vec{T}(t)+a_N\vec{N}(t) \quad |\vec{a}(t)|=\sqrt{a_T^2+a_N^2} \quad a_T=\frac{d|\vec{V}|}{dt} \quad a_N=K|\vec{V}|^2$

$|\vec{V}|$ اندازه بردار سرعت لحظه‌ای $\quad K$ انحنا منحنی در لحظه t $\quad \vec{a}_T$ مؤلفه مماس $\quad \vec{a}_N$ مؤلفه قائم بردار شتاب است

تاب منحنی τ

τ تاب منحنی و عکس آن $\rho=\frac{1}{\tau}$ شعاع تاب در نقطه پیچش منحنی

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$$

بردار قائم یکانی دوم ← $\quad$ بردار قائم یکانی اول ← $\quad$ طول قوس منحنی

$R(t)$ منحنی $\rightarrow$ تاب $\tau=\frac{\vec{R}'(t)\cdot(\vec{R}''(t)\times\vec{R}^{(3)}(t))}{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|^2}$

تاب منحنی که در یک صفحه واقع شده است صفر است

شتاب در جهت بردار سرعت

فصل ۶ - انتگرال‌های دوگانه

انتگرال دوگانه

$$I=\int_a^b\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

مرکز سطح یک ناحیه

$$x_c=\frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}=\frac{\iint x\,dx\,dy}{S}\qquad y_c=\frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}=\frac{\iint y\,dx\,dy}{S}$$

ممان اینرسی یک ناحیه

$$I_x=\iint_D y^2\,dx\,dy\qquad I_y=\iint_D x^2\,dx\,dy\qquad I_O=I_x+I_y$$

مقدار متوسط یک تابع دو متغیره در یک ناحیه

$$\bar{f}=\frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

حجم ناحیه محدود شده به دو رویه

$$\iint_D (f(x,y)-g(x,y))\,dx\,dy$$

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases} \text{یا} \begin{cases} u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases} \longrightarrow f(x,y)\to f(x(u,v),y(u,v))=h(u,v)$$

$$\text{ژاکوبین } J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\longrightarrow I=\iint_D h(u,v)\,|J|\,du\,dv$$

محاسبه یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad \begin{cases} r^2=x^2+y^2\to r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\to\theta=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\end{cases}$$

الف) اگر مسئله در مختصات دکارتی بود و قصد تبدیل به مختصات قطبی را داشتیم ۱- تابع $f(x,y)$ را برحسب r و θ نوشته

۲- مرز ناحیه D را به r و θ تبدیل کرد ۳- به جای $dx\,dy$ از $r\,dr\,d\theta$ استفاده می‌کنیم

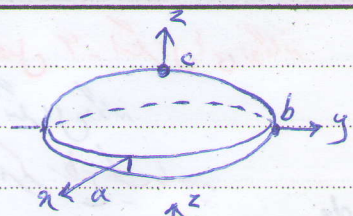
* در صورت وجود مرزهای بیضی شکل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در معادله مرزهای یک ناحیه انتگرال دوگانه، استفاده از تغییر متغیرهای شبه قطبی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2\qquad \tan\theta=\frac{ay}{bx}\qquad dx\,dy=ab\,r\,d\theta\,dr$$

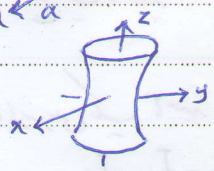
مناسب است $\begin{cases} x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$

PAYCO

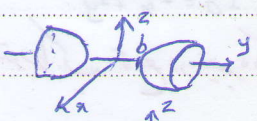
فصل ۷ - رویه‌های فضایی



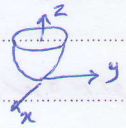
بیضی‌گون یا الیپسوئید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



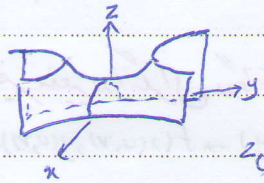
هذلولی‌گون یک پارچه یا هیپربولوئید یک پارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



هذلولی‌گون دو پارچه یا هیپربولوئید دو پارچه $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

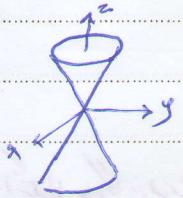


سهموی بیضوی یا پارابولوئید بیضوی شکل $c>0;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$



سهموی هذلولوی یا پارابولوئید هذلولوی (رویه زین اسبی) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

* مبدأ مختصات در این رویه یک نقطه زینی یا مینیماکس نامیده می‌شود که از دید رویه صفحه yoz کمترین z را دارد و از دید رویه صفحه xoz بیشترین z را دارد.



مخروط $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

معادله کلی سطوح درجه دوم $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz=G$

A

$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2=C(z-\gamma)$
- $AB=0 \rightarrow$ رویه استوانه‌ای
- $AB>0 \rightarrow$ سهموی بیضوی
- $AB<0 \rightarrow$ سهموی هذلولوی (رویه زین اسبی)

$A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2+C(z-\gamma)^2=H$
- $ABC=0$ استوانه‌ای شکل
- $ABC\neq 0$ ، A,B,C هم‌علامت $\rightarrow$ بیضی‌گون
- $ABC\neq 0$ A,B,C غیرهم‌علامت $\rightarrow$ هذلولی‌گون یک پارچه / هذلولی‌گون دو پارچه (یکی از آن‌ها) / مخروط

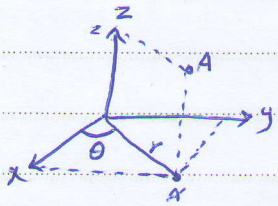
فصل ۸- انتگرال سه‌گانه

مسایل در دستگاه مختصات دکارتی

$$I=\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D \int_{z=P(x,y)}^{z=Q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

تصویر V بر روی صفحه xoy ناحیه‌ای مانند D است

مسایل در دستگاه مختصات استوانه‌ای



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\theta\,dz$$

در مختصات استوانه‌ای

$r=a$ ← استوانه‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a که محور تقارن آن محور z است

$r^2+z^2=a^2$ ← یک کره به مرکز مبدأ و شعاع a

$z=kr$ ← یک مخروط به راس مبدأ است که محور تقارن آن z و نصف زاویه راس آن $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ است

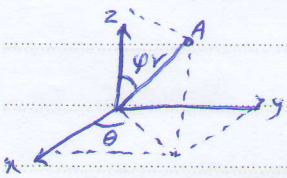
$z=kr^2$ ← سهمی‌گون با راس مبدأ که محور تقارن آن محور z است

$\theta=\theta_0$ ← صفحه گذرنده از محور z است که از یک طرف به محور oz محدود شده و با صفحه xoz زاویه θ_0 می‌سازد

* اگر تصویر ناحیه V روی صفحه xoy یک بیضی مانند $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$ باشد، استفاده از تغییر متغیرهای شبه استوانه‌ای روبرو می‌تواند راه‌گشا باشد

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{b}\frac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz=ab\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

مسایل در دستگاه مختصات کروی



$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi=\operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz=r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

* در مختصات کروی

$r=a$ ← کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a ← $r^2\sin^2\varphi=a^2$ ← استوانه‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a

$r=\frac{a}{\cos\varphi}$ ← صفحه‌ای به موازات xoy و با فاصله a ← $\theta=\theta_0$ ← نیم صفحه گذرنده از محور z که از یک طرف به محور oz محدود و با محور x زاویه θ_0 می‌سازد

$\varphi=\varphi_0$ ← مخروط به راس مبدأ و زاویه نیم‌راس φ ← $r=2a\cos\varphi$ کره‌ای به مرکز $(0,0,a)$ و شعاع a است

* وجود مرزهای بیضی‌گون و به خصوص جمله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

$$\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta \\ y=br\sin\varphi\sin\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{b}\frac{y}{x}\right) \\ \varphi=\operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{c\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz=ab\,c\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

PAYCO

تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

ژاکوبین تغییر دستگاه

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \qquad J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D h(u,v,w)\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$$ حجم محصور به ناحیه V

مختصات مرکز ثقل ناحیه محصور شده به حجم V با توزیع یکنواخت $\rho = \rho(x,y,z)$

$$x_G = \frac{\iiint_V \rho x\,dV}{\iiint_V \rho\,dV} \qquad y_G = \frac{\iiint_V \rho y\,dV}{\iiint_V \rho\,dV} \qquad z_G = \frac{\iiint_V \rho z\,dV}{\iiint_V \rho\,dV}$$

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2\,dV \qquad I_{xz} = \iiint_V \rho y^2\,dV \qquad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2\,dV$$ گشتاور ماند

گشتاور ماند نسبت به برای مختصات

$$I_{xx} = \iiint_V \rho(y^2+z^2)\,dV \qquad I_{yy} = \iiint_V \rho(x^2+z^2)\,dV \qquad I_{zz} = \iiint_V \rho(x^2+y^2)\,dV$$

$$I_o = \iiint_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

PAYCO

فصل ۹ - انتگرال‌های خط

انتگرال‌های منحنی الخط نوع اول $I=\int_c f(x,y,z)\,ds$ ← c یک منحنی و $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ المان طول قوس منحنی

$c: y=h(x) \to ds=\sqrt{1+h'^2(x)}\,dx$ $\qquad$ $c: x=h(y) \to ds=\sqrt{1+h'^2(y)}\,dy$

$c: r=h(\theta) \to ds=\sqrt{h^2(\theta)+h'^2(\theta)}\,d\theta$ $\qquad$ $c: x=x(t), y=y(t) \to ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

$c: x=x(t), y=y(t), z=z(t) \to ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

$\int_{AB} P(x,y,z)\,ds=-\int_{BA} P(x,y,z)\,ds$

- طول منحنی c در فاصله‌ای مشتق پذیری آن برابر $L=\int_c ds$
- مرکز طول منحنی به مختصات روبرو است $\bar{x}=\frac{\int_c x\,ds}{L}$ $\quad \bar{y}=\frac{\int_c y\,ds}{L}$ $\quad \bar{z}=\frac{\int_c z\,ds}{L}$
- اگر $\rho(x,y,z)$ چگالی منحنی c باشد جرم منحنی برابر $m=\int_c \rho(x,y,z)\,ds$
- c منحنی معلوم در صفحه xy

سطح حاصل از دوران منحنی c حول محور x : $S_x=2\pi\int_c y\,ds$

سطح حاصل از دوران منحنی c حول محور y : $S_y=2\pi\int_c x\,ds$

- c منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در فاصله θ_1 تا θ_2

$S_x=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

$S_y=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

- c منحنی پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ برای $a\le t\le b$ باشد

$S_x=2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt$

$S_y=2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt$

انتگرال منحنی الخط نوع دوم (کار یک میدان برداری)

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ بردار موضعی یک نقطه از منحنی معلوم c و $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ المان بردار مماس روی c باشد

کار مربوط به میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ روی منحنی c $W=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

انتگرال منحنی الخط نوع دوم مستقل از مسیر (کار میدان‌های برداری پایستار)

شرط آنکه میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ پایستار باشد انتگرال $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ مستقل از مسیر بوده و تنها به نقاط ابتدایی و انتهای مسیر بستگی داشته باشد آن است که

الف) $\vec{F}$ غیرچرخشی باشد ← $\nabla\times\vec{F}=0$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$

یا ب) تابعی مانند u باشد که $du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ باشد که $u(x,y,z)$ را تابع پتانسیل میدان برداری پایستار $\vec{F}$ گفته و آن را به صورت روبرو بدست می‌آورند

$\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, $\frac{\partial u}{\partial z}=R$

PAYCO

اگر $I=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$ مستقل از مسیر باشد با داشتن تابع پتانسیل آن نقطه ابتدایی $I=u\Big|_{\text{نقطه انتهایی}}-u$

قضیه گرین در صفحه

C یک منحنی بسته در جهت مثلثاتی و D ناحیه محصور به آن اگر توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ و $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه D پیوسته باشند

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

زمانی که ناحیه محصور سمت راست منحنی باشد C^- و سمت چپ باشد C^+

C یک منحنی بسته و مساحت D برابر $S=\iint dxdy=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$

C یک منحنی بسته به صورت $r=f(\theta)$ مساحت ناحیه محصور $S=\frac{1}{2}\oint_C r^2d\theta$

ناحیه D در صفحه uv به منحنی بسته C محدود باشد و $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ $\leftarrow$ $S=\iint_D\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

S تصویر ناحیه D در صفحه xy

مساحت رویه $=\iint_D\sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2}\,dudv$

اگر $z=f(x,y)$ سطح S به معادله $f(x,y)$ $=\iint_D\underbrace{\sqrt{z'^2_x+z'^2_y+1}\,dxdy}_{ds}$

مساحت قسمتی از رویه $\iint_S ds=\iint_D f\,ds$

شار

شار F در جهت n $=\iint_S F.ds=\iint_S F.\vec{n}ds$

n بردار قائم وارد بر سطح $g(x,y,z)=0$ $n=\frac{\nabla g}{|\nabla g.\vec{k}|}$

قضیه واگرایی

$$\iiint_V \nabla.F\,dv=\iint div\,F\,dv=\iint_S(\vec{F}.\vec{n})ds=\oint_C \vec{F}.nds$$

PAYCO